

$C_y(Fr)$, где меньше отношение V_2/V_1 . Влияние различных скоростей потоков в этом интервале очень значительно.

На рис. 2 представлен интервал $Fr > Fr^*$. Здесь выделяются два характерных диапазона. При $Fr^* < Fr < 1$ влияние различных скоростей потоков фактически отсутствует и результаты расчета C_y совпадают с результатами для однородного по скорости и плотности потока, имеющего свободную поверхность. При $Fr > 1$ начинает сказываться многослойность потока. Отметим, что расчет проведен с некоторым отступлением от $Fr^* = 0.1732$, т.к. при приближении к критическому значению числа Фруда резко возрастает время расчета.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 99-01-00169, 99-01-00173).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лотфуллин М.В., Филиппов С.И. *Моделирование границ раздела в задачах обтекания профиля крыла весомой жидкостью* // ПМТФ. – 1992. – №4. – С. 84-89.
2. Лотфуллин М.В., Стурова И.В., Филиппов С.И. *Гидродинамическое воздействие на контур, обтекаемый равномерным потоком двухслойной жидкости* // Вычислительные технологии. – Новосибирск: ИВТ СО РАН, 1994. – Т. 3. – №8. – С. 108-115.
3. Милн-Томсон Л.М. *Теоретическая гидродинамика*. – М.: Мир, 1964. – 656 с.
4. Сретенский Л.Н. *Теория волновых движений жидкости*. – М.: Наука, 1977. – 816 с.

УСИЛЕНИЕ ВНЕШНЕГО СИГНАЛА В НЕУСТОЙЧИВОМ РЕЗОНАТОРЕ

Н.Д. Черепенин

*Казанский энергетический институт
Казань, 420066, Красносельская, 51*

Рассматривается неустойчивый оптический резонатор, в который каким-то образом (через отверстие связи в зеркале или через его край) вводится когерентный пучок от внешнего источника – стабильного лазера. Такие резонаторы применяются в лазерных генераторах с

управляемыми спектрально-временными характеристиками излучения, а также в многопроходовых усилителях [1].

В статье [2] представлены результаты численного расчета собственных мод для пустого неустойчивого резонатора с центральным отверстием в зеркале. Исследования режима усиления внешнего сигнала в неустойчивом резонаторе проведены в работах [3,4].

Рассмотрим двумерный неустойчивый резонатор, образованный двумя цилиндрическими зеркалами: опорным ($z=0$) и выходным ($z=l$), ось z направлена по оптической оси резонатора. Поле излучения при $0 < z < l$ является суперпозицией двух встречных волн с комплексными амплитудами $E_+(x, z)$ и $E_-(x, z)$, удовлетворяющими системе параболических уравнений [4]

$$\pm 2ik \frac{\partial E_{\pm}}{\partial z} + \frac{\partial^2 E_{\pm}}{\partial x^2} = ikgE_{\pm}, \quad (1)$$

где k – волновое число, g – коэффициент усиления лазерной среды.

Для упрощения решения выделим из функций $E_{\pm}(x, z)$ фазовые множители вида $\exp[ikx^2/2(f \pm z)]$, соответствующие двум встречным геометрическим собственным волнам неустойчивого резонатора [1,5]. При этом граничные условия на зеркалах могут быть записаны в виде

$$E_+(x, 0) = -\rho_1(x)E_-(x, 0) + E(x), \quad (2)$$

$$E_-(x, l) = -\rho_2(x)e^{i\Delta\varphi}E_+(x, l), \quad (3)$$

где $\rho_m(x)$ – амплитудные коэффициенты отражения опорного ($m=1$) и выходного ($m=2$) зеркал, $E(x)$ – амплитуда инжектируемого пучка, параметр $\Delta\varphi = 2kl(\text{mod } 2\pi)$ определяется частотой этого пучка [4]. Здесь предполагалось, что сигнал вводится со стороны опорного зеркала; при инжекции пучка со стороны выходного зеркала член $E(x)$ переносится из граничного условия (2) в граничное условие (3).

Преобразование поля $v(x) = E_+(x, l)$ при полном обходе резонатора волной излучения может быть представлено в виде композиции $P_{g,p} = P_{g,p}^+ P_{g,p}^-$ двух интегральных преобразований типа Френеля-Кирхгофа [1,5]

$$u(x) = P_{g,p}^- v = G(I_1) \sqrt{\frac{F}{i}} \int \rho_2(x') \exp[i\pi F \mu_1(x' - x/\mu_1)^2] v(x') dx', \quad (4)$$

$$\tilde{v}(x) = P_{g,\rho}^+ u = G(I_2) \sqrt{\frac{F}{i}} \int \rho_1(x') \exp[i\pi F \mu_2 (x' - x/\mu_2)^2] u(x') dx',$$

где $F = k a^2 / 2\pi l$ – число Френеля (a – полуширина выходного зеркала, принята за масштаб безразмерных координат x и x'), μ_1 и μ_2 – коэффициенты изменения поперечных размеров собственных геометрических волн при прохождении ими резонатора в соответствующих направлениях, $G(I_1)$ и $G(I_2)$ – амплитудные множители, зависящие от полных интенсивностей поля $I_1(x)$ и $I_2(x)$ в призеркальных слоях усиления.

Таким образом, краевая задача (1) – (3) приводится к операторному уравнению

$$v = e^{i\Delta\varphi} P_{g,\rho} v + P_{g,1}^+ E, \quad (5)$$

выражающему условие воспроизведения комплексной амплитуды волны при полном обходе резонатора с включением инжектируемого пучка. Операторы $P_{g,\rho}^+$ и $P_{g,\rho}$ являются нелинейными, т.к. содержат множители $G(I)$. При расчетах усиления активной среды была использована формула, соответствующая модели Ригрода [1,4]

$$G(I) = \exp[0.5 g_0 I / (1 + I)], \quad (6)$$

в которой g_0 – коэффициент усиления слабого сигнала, I – безразмерная интенсивность поля, масштабом которой служит характерная интенсивность насыщения [4].

Самосогласованное решение уравнения (5) находилось с помощью итерационной процедуры, состоящей в последовательном выполнении преобразований (4) и пересчете амплитудных множителей по формуле (6). При вычислении интегралов (4) с быстроосциллирующим ядром использовалась специальная квадратурная формула [5], аппроксимирующая такие интегралы с хорошей точностью в широком диапазоне чисел Френеля.

Получаемое решение будет соответствовать режиму усиления инжектируемого пучка, при котором не происходит генерации собственных мод резонатора. Если же порог самовозбуждения оказывается превышен, то в резонаторе одновременно могут усиливаться поле внешнего сигнала и собственные типы колебаний, взаимодействующие между собой. Такая ситуация не описывается полученным решением. В этой связи дополнительно рассматривалась задача о собст-

венных колебаниях в том же резонаторе (но без инъекции пучка) при распределении коэффициента усиления, найденном из решения первой задачи (т.е. интенсивность собственных волн считается бесконечно малой). Эта задача сводится к проблеме собственных значений уравнения

$$\gamma w = P_{g,p} w, \quad (7)$$

которое в отличие от (5) является линейным, т.к. коэффициент усиления здесь считается заданным и не зависит от w .

С точки зрения вопроса об устойчивости режима усиления инжектируемого пучка достаточно найти наибольшее по модулю собственное значение γ_1 , соответствующее низшей по потерям моде "нагруженного" резонатора. Эта задача решалась методом установления [2,5]. Критерием устойчивости режима усиления внешнего сигнала по отношению к развитию собственной генерации, очевидно, служит условие $|\gamma_1| < 1$. Значение $|\gamma_1| = 1$ является критическим и соответствует переходу из указанного режима усиления в режим, когда это усиление сопровождается генерацией на собственной частоте.

Численные расчеты проводились для телескопического резонатора с $M=2$, $F=45$ и отверстием связи в центре опорного зеркала размером $0,2a$. Для различных значений $\Delta\phi$, E и $g_0 l$ находились распределения поля на выходе из резонатора и в дальней зоне. Результаты расчетов свидетельствуют, в частности, что при увеличении отстройки частоты $\Delta\omega = c\Delta\phi/2l$ в целом происходит ухудшение выходных характеристик резонатора: возрастает расходимость излучения и падает отношение мощностей выходного и инжектируемого пучков. Уменьшение амплитуды внешнего сигнала E приводит к возрастанию значений $|\gamma_1|$, переходя при определенных уровнях накачки $g_0 l$ пороговую величину $E_{кр}$, при которой $|\gamma_1| = 1$ и начинается развитие генерации собственной моды резонатора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ананьев Ю.А. *Оптические резонаторы и лазерные пучки*. — М.: Наука, 1990. — 264 с.
2. Черепенин Н.Д. *К расчету характеристик излучения неустойчивого резонатора с отверстием в зеркале*//В кн.: Вычислительные методы в физической газовой динамике. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1989. — С.84-96.

3. Бондаренко А.В., Даньщиков Е.В., Елкин Н.Н. и др. Угловая селекция излучения при регенеративном усилении в лазере с неустойчивым резонатором//Квантовая электроника. – 1988. – №1. – С.30-36.

4. Елкин Н.Н., Ильиных О.И., Лиханский В.В., Напартович А.П., Трощива В.Н. Усиление света при инжекции в неустойчивый резонатор с активной средой. Препринт ИАЭ-4527/16. – М.: ЦНИИатомиформ, 1987. – 16 с.

5. Черепенин Н.Д. К расчету поля излучения в неустойчивых оптических резонаторах на основе интегральных уравнений//В кн.: Математическое моделирование в физической газовой динамике. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1985. – С.71-84.

О РАСЧЕТЕ ВЯЗКОУПРУГИХ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А. К. Касумов

Институт математики и механики АН Азербайджана, Баку

1. Постановка задачи. Рассмотрим пространственную стержневую конструкцию, нагруженную произвольным образом и состоящую из прямолинейных стержней, жестко скрепленных между собой. Пусть материал каждого элемента описывается линейным соотношением вязкоупругости, т.е. $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^y + \varepsilon_{ij}^s$, где ε_{ij} - полная деформация, ε_{ij}^y - упругая составляющая, ε_{ij}^s - вязкая составляющая. Для простоты предположим, что материал является изотропным. Тогда имеем [1]

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}^y &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}), \\ \varepsilon_{ij}^s &= \frac{3}{2} \int_0^t K(t-\tau) \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{ke} \delta_{ke} \right) d\tau,\end{aligned}\tag{1}$$

где ν - коэффициент Пуассона, E - модуль Юнга, σ_{ij} - полное напряжение, δ_{ij} - тензор Кронекера, $K(t)$ - ядро ползучести.

Предположим, что задача решается в рамках геометрической линейности, т.е. соотношение Коши возьмем в виде

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right),\tag{2}$$

где U_i - компоненты вектора перемещения. В этом случае уравнения равновесия примут вид